高校数学の主要公式・要点

オクトス*

最終更新日：平成 20 年 5 月 25 日

概 要

普通科高校「数学 (I,II,III,A,B,C)」の重要部分についてまとめたものである．なお、現行課程では歯止め規定がかかっているものや指導要領範囲外となるものも一部取り扱っている．具体的には，最近の旧課程で扱われていたもの（複素数平面・微積分の「曲線の長さ」・「速度と道のり」等），それ以外で比較的多数の大学が出題する事項（微分積分学・線形代数の基本部分等）を含めている．なお，符号は全て複号同順である．

1 方程式と不等式（高校数学 I）

1.1 多項式（高校数学 I）

A, B, C は整式とする．

- 数や文字および，それらをかけ合わせてできる式を単項式と言い，いくつかの単項式の和として表される式を多項式（整式）と言う．多項式中の各単項式を項と言う．文字の部分が同じである項を同類項と言う．
- 単項式での数の部分を係数，かけ合わせた文字の個数を，その単項式の次数と言う．多項式において，最も次数の高い項の次数を，この多項式の次数と言う．最高で n 次の多項式が含まれる式を n 次式と言う．
- 項の並べ方について，次数が高い順に並べることを降べきの順，低い順に並べることを昇べきの順と言う．
- $A + B = B + A, AB = BA$（交換法則）
- $(A + B) + C = A + (B + C), (AB)C = A(BC)$（結合法則）
- $A(B + C) = AB + AC, (A + B)C = AC + BC$（分配法則）
- 1×2 を $1 \cdot 2$ のように書くことがある．

1.2 展開と因数分解（高校数学 I）

a, b, c は実数とする．

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
- $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

*http://the-83-freeway.lolipop.jp/

1.3　実数（高校数学 I）

m, n を $n \neq 0$ なる整数，p, q を有理数，l を無理数とする．

- $\dfrac{m}{n}$ で表される数を有理数と言う．2 つの有理数を四則演算した結果は有理数である．
- 小数は循環小数と循環しない小数に分かれる．前者は有理数，後者は無理数である．
- 有理数と無理数を合わせて実数と言う．2 つの実数を四則演算した結果は実数である．
- $p + ql = 0 \Leftrightarrow p = q = 0.$

1.4　絶対値（高校数学 I）

A は整式，a, b, x, n は実数とする．

- 数直線上で基準となる点 O を原点と言う．点 P に実数 a が対応するとき，a を点 P の座標と言い，$\mathrm{P}(a)$ と表す．また，OP の長さを $|a|$ で表す．
- $A \geqq 0$ のとき $|A| = A, A < 0$ のとき $|A| = -A.$

1.5　平方根の計算（高校数学 I）

a, b, k は正の実数，A は整式とする．

- $\sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}, \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}, \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$
- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{ab}}{b}$（分母の有理化）
- $\sqrt{A^2} = |A|$
- $\sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}} = |\sqrt{a} \pm \sqrt{b}|$（※歯止め規定）

1.6　関数とグラフ（高校数学 I）

- 式において値が可変であるものを変数と言い，固定されているものを定数と言う．2 つの変数 x, y があって，x の値を定めると，それに対応して y の値がただ 1 つ定まるとき，y は x の関数であると言う．
- y が x の関数であることを，文字 f 等を用いて，$y = f(x)$ と表す．単に $f(x)$ ということがある．
- $y = f(x)$ について，x の値 a に対応する y の値を $f(a)$ と表し，$x = a$ における値という．$y = f(x)$ について，変数 x の取り得る値の範囲を定義域，x が定義域全体を動くとき，$f(x)$ の取り得る値の範囲，変数 y の変域を関数の値域と言う．
- 2 変数の式が $f(x, y) = f(y, x)$ を満たすとき，$f(x, y)$ を 2 変数の対称式と言う．2 変数の対称式は $x + y, xy$ の基本対称式で表される．
- 平面上に原点 O と，O で垂直に交わる x 軸と y 軸を定めたとき，この平面を座標平面と言う．座標平面上の点 P の座標が (a, b) であるとき，$\mathrm{P}(a, b)$ と書く．
- $y = f(x)$ が与えられたとき，$y = f(x)$ を満たすような点 (x, y) 全体で作られる図形をこの関数のグラフ，$y = f(x)$ のグラフの方程式と言う．逆に，点 (a, b) が関数 $y = f(x)$ のグラフ上にあるならば，$b = f(a)$ が成立する．
- $y = ax + b (a \neq 0)$ は x の 1 次関数で，直線 $y = ax + b$ と言う．

1.7　1 次不等式（高校数学 I）

a, b, c, x は実数とする．

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c, a - c < b - c$
- $a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc, \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}, a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc, \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$
- x の 1 次不等式を考える．$a > 0$ ならば $ax > b \Leftrightarrow x > \dfrac{b}{a}, ax \geqq b \Leftrightarrow x \geqq \dfrac{b}{a}$
  $a < 0$ ならば $ax > b \Leftrightarrow x < \dfrac{b}{a}, ax \geqq b \Leftrightarrow x \leqq \dfrac{b}{a}$.

2　2 次関数（高校数学 I）

2.1　2 次関数について（高校数学 I）

a, b, c は $a \neq 0$ なる実数とする．xy 平面上で考える．

- $y = f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$
- 軸の方程式は $x = -\dfrac{b}{2a}$ であり，頂点の座標は $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ である．
- $a > 0$ のとき下に凸，$a < 0$ のとき上に凸である．

2.2　2 次方程式と 2 次不等式（高校数学 I）

a, b, c, α, β は $a \neq 0, \alpha < \beta$ なる実数とする．

- x の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ である．ここで，$b^2 - 4ac$ を判別式と言い，D で表す．$D > 0$ のとき相異なる 2 つの実数解を，$D = 0$ のとき実数の重解を，$D < 0$ のとき共役な 2 つの虚数解をもつ（虚数については後述）．
- x の 2 次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ の解は $x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$ である．判別式 $\dfrac{D}{4}$ は $b' - ac$ となる．
- x の 2 次方程式が $a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ と変形できる場合，解は $x = \alpha, \beta$ である．
- x の 2 次不等式について，$(x - \alpha)(x - \beta) > 0 \Leftrightarrow x < \alpha, x > \beta, (x - \alpha)(x - \beta) \geqq 0 \Leftrightarrow x \leqq \alpha, x \geqq \beta$,
  $(x - \alpha)(x - \beta) < 0 \Leftrightarrow \alpha < x < \beta, (x - \alpha)(x - \beta) \leqq 0 \Leftrightarrow \alpha \leqq x \leqq \beta$.

2.3　2 次方程式とグラフの関係（高校数学 I）

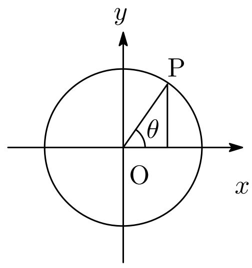
a, b, c は $a \neq 0$ なる実数とする．xy 平面上で考える．

- $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ の x 軸との共有点の x 座標は，x の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解である．
- $f(x)$ は x 軸と，判別式について，$D > 0$ のとき 2 つの共有点をもち，$D = 0$ のとき接し，$D < 0$ のとき共有点をもたない．

3　三角比と三角関数（高校数学 I・数学 II）

3.1　三角比の定義（高校数学 I・数学 II）

xy 平面上にある半径 1 の単位円の円周上に点 $\mathrm{P}(x,y)$ をとり，x 軸に垂線を降ろす．OP$=r$ とすると，$\sin\theta=\dfrac{y}{r},\cos\theta=\dfrac{x}{r},\tan\theta=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)$ と定義される．



3.2　三角比の相互関係（高校数学 I）

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta},1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

3.3　三角比と図形（高校数学 I）

3 辺の長さを a,b,c とし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とする．また，それぞれの辺に対応する角を A,B,C とする．さらに，R を $\triangle$ABC の外接円の半径，r を $\triangle$ABC の内接円の半径，S を $\triangle$ABC の面積とする．

- $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ であり，$a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$ も成立する（正弦定理）．
- $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ であり，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ も成立する（余弦定理）．書物によっては，$a=b\cos C+c\cos B,b=c\cos A+a\cos C,c=a\cos B+b\cos A$ を余弦定理とするものもある．
- $\sin(B+C)=\sin A,\cos(B+C)=-\cos A$ であり（補角公式），$\sin\dfrac{B+C}{2}=\cos\dfrac{A}{2},\cos\dfrac{B+C}{2}=\sin\dfrac{A}{2}$ である（余角公式）.（※高校数学範囲外）
- $S=\dfrac{bc\sin A}{2}=\dfrac{ca\sin B}{2}=\dfrac{ab\sin C}{2}=rs$
- $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（ヘロンの公式）（※歯止め規定）
- $R=\dfrac{abc}{4S},r=\dfrac{S}{s}$
- a,b,c が三角形を形成する条件は $|a-b|<c<a+b$（c が最も長い辺）かつ $A+B+C=180^\circ$ である．

3.4　図形と計量（高校数学 I）

- ある地点から上に見上げた角度を仰角，下に見下ろした角度を俯角と言う．
- $a:b$ の相似形の面積比は $a^2:b^2$ で，体積比は $a^3:b^3$ である．
- 半径 r の球の表面積は $4\pi r^2$ であり，体積は $\dfrac{4\pi r^3}{3}$ である．

3.5　弧度法（高校数学 II）

- $180^\circ=\pi$ ラジアン (rad) とする．通常，弧度法では単位を省略する．
- 弧度法の角 $\theta(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ を中心角とする半径 r の弧の長さは $r\theta$ で，面積は $\dfrac{r^2\theta}{2}$ である．

3.6　代表的な三角関数の値と符号（高校数学 I・数学 II）

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	定義されない	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

	第 1 象限	第 2 象限	第 3 象限	第 4 象限
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

3.7　三角関数のグラフ（高校数学 II）

n は $n \neq 0$ なる実数とする.

- $|\sin\theta| \leqq 1, |\cos\theta| \leqq 1, \tan\theta$ の値域は実数全体である.
- $f(\theta) = \sin n\theta, f(\theta) = \tan n\theta$ は奇関数で，$f(\theta) = \cos n\theta$ は偶関数である．いずれも，基本周期は $\dfrac{2\pi}{|n|}$ である.

3.8　三角関数の性質（高校数学 II）

- $\sin(2\pi \pm \theta) = \sin\theta, \cos(2\pi \pm \theta) = \cos\theta, \tan(2\pi \pm \theta) = \tan\theta$
- $\sin(-\theta) = -\sin\theta, \cos(-\theta) = \cos\theta, \tan(-\theta) = -\tan\theta$
- $\sin(\pi \pm \theta) = \mp\sin\theta, \cos(\pi \pm \theta) = -\cos\theta, \tan(\pi \pm \theta) = \pm\tan\theta$
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos\theta, \cos\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp\sin\theta, \tan\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp\dfrac{1}{\tan\theta}$

3.9　加法定理（高校数学 II）

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta, \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

3.10　2 直線のなす角（高校数学 II）

xy 平面上の 2 直線 $y = m_1x + n_1, y = m_2x + n_2$ が交わり，直交でないとき，そのなす鋭角を θ とすると，$\tan\theta = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|$ である（$m_1m_2 \neq -1$）.

3.11　2 倍角の公式（高校数学 II）

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta, \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

3.12　半角の公式（高校数学 II）

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{2}, \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2}, \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$$

3.13　積と和の公式（高校数学 II）

- $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}, \sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
- $\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}, \sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
- $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}, \cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
- $\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}, \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

3.14　三角関数の合成（高校数学 II）

a, b を実数とするとき，$a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)\left(r=\sqrt{a^2+b^2}, \cos\alpha = \dfrac{a}{r}, \sin\alpha = \dfrac{b}{r}\right)$.

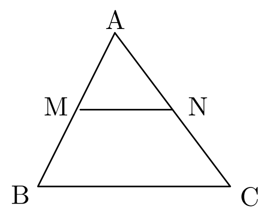
4　平面図形（高校数学 A）

4.1　三角形の合同・相似（高校数学 A）

- 2 つの三角形は「3 辺の長さが等しい」か「2 辺の長さとその間の角が等しい」か「1 辺の長さとその両端の角」が等しければ合同であり，$\equiv$ で表す.
- 2 つの三角形は「3 組の辺の長さの比が等しい」か「2 組の辺の長さの比とその間の角が等しい」か「2 組の角」が等しければ相似であり，$\backsim$ で表す.

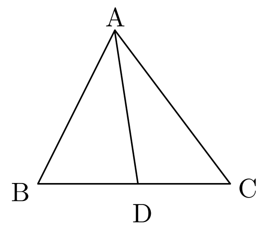
4.2　中線連結定理（高校数学 A）

- AM=MB,AN=NC⇒MN//BC,MN= $\dfrac{1}{2}$BC
- AM=MB,MN//BC⇒AN=NC,MN= $\dfrac{1}{2}$BC



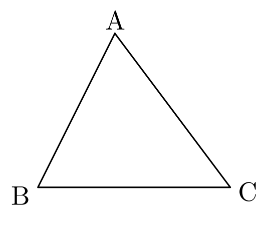
4.3　2 等分線の性質（高校数学 A）

△ABC において，∠BAD= ∠DAC ならば AB:AC=BD:BC



4.4　三角形の辺と角の大小（高校数学 A）

∠ABC> ∠BCA⇔AC>AB

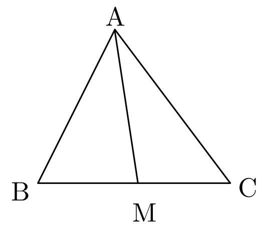


4.5　ピタゴラスの定理（三平方の定理）と応用（高校数学 A）

△ABC において，$\angle$ACB$=90^\circ \Leftrightarrow$ AB$^2=$BC$^2+$CA^2, $\angle$ACB$<90^\circ \Leftrightarrow$ AB$^2<$BC$^2+$CA^2, $\angle$ACB$>90^\circ \Leftrightarrow$ AB$^2>$BC$^2+$CA^2 である．

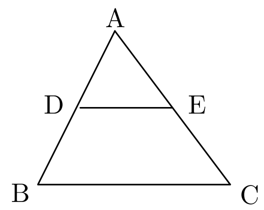
4.6　中線定理（高校数学 A）

BM=MC$\Rightarrow$AB$^2+$AC$^2=2($AM$^2+$BM$^2)$



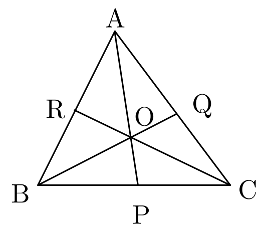
4.7　平行線と比例（高校数学 A）

DE//BC$\Leftrightarrow \dfrac{\text{AD}}{\text{AB}}=\dfrac{\text{AE}}{\text{AC}}=\dfrac{\text{DE}}{\text{BC}}$



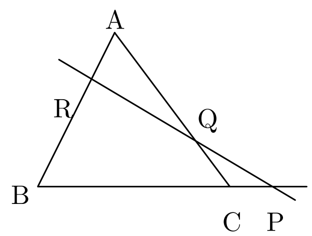
4.8　チェバの定理（高校数学 A）

AP,BQ,CR が 1 点で交わる．$\Leftrightarrow \dfrac{\text{BP}}{\text{PC}}\cdot\dfrac{\text{CQ}}{\text{QA}}\cdot\dfrac{\text{AR}}{\text{RB}}=1$



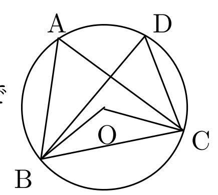
4.9　メネラウスの定理（高校数学 A）

P,Q,R が BC,CA,AB 上にあり，同一直線上にある．$\Leftrightarrow \dfrac{\text{BP}}{\text{PC}}\cdot\dfrac{\text{CQ}}{\text{QA}}\cdot\dfrac{\text{AR}}{\text{RB}}=1$



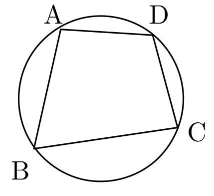
4.10　円周角の定理（高校数学 A）

円周角は同弧に対する中心角の半分に等しく，同弧に対する円周角は等しい．右図の場合，O が円の中心である．このとき，$\angle$BAC$=\angle$BDC$=\dfrac{1}{2}\angle$BOC である．

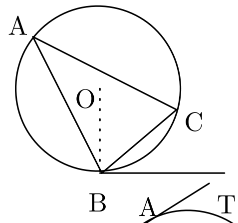


4.11　円に内接する四角形（高校数学 A）

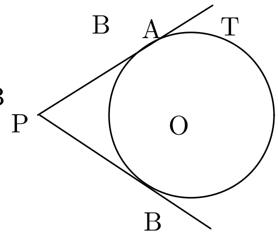
四角形 ABCD が円に内接する．$\Leftrightarrow$ 向かい合う角の和が 180° である．



4.12　円と接線（高校数学 A）

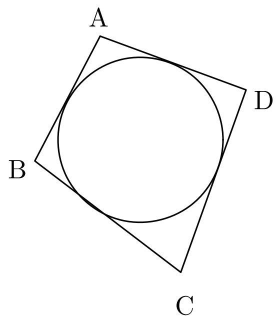


BT が円 O の接線である．⇔OB⊥BT⇔ ∠BAC= ∠CBT



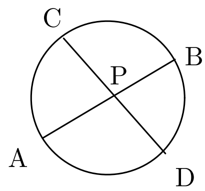
円 O 外の 1 点 P から 2 本の接線を引いて，PA=PB であるとき，PO は ∠APB を 2 等分し，AB の垂直二等分線となる．

4.13　円に外接する四角形（高校数学 A）

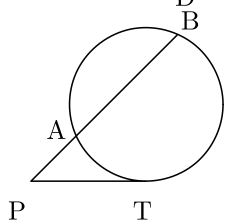


四角形 ABCD が円に外接する．⇔AB+CD=BC+AD

4.14　方べきの定理（高校数学 A）



A,B,C,D が同一円周上にある．⇔PA·PB=PC·PD



A,B,T が同一円周上にあり，PT が円に接する．⇔PT^2 =PA·PB

4.15　三角形の五心（高校数学 A）

- 重心 G は 3 つの中線の交点であり，G は各中線を 2 : 1 に内分する．
- 内心 I は 3 つの内角の 2 等分線で，内接円の中心である．内心は 3 つの辺から等距離にある．
- 外心 O は 3 辺の垂直二等分線の交点で，外接円の中心である．外心は 3 つの辺から等距離にある．
- 垂心 H は各頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線の交点である．
- 傍心は 1 つの頂点における内角の 2 等分線と，他の 2 つの頂点における外角の 2 等分線の交点であり，1 つの三角形に 3 つある．傍心を中心として，1 辺と他の 2 辺の延長に接する円が存在し，その円を傍接円と言う．

4.16　2 つの円の位置関係（高校数学 A）

- 2 つの円の中心間における距離が d，円の半径がそれぞれ $r_1, r_2(r_1 > r_2)$ とする．$d > r_1 + r_2$ のとき，2 つの円は離れている．$d = r_1 + r_2$ のとき，2 つの円は外接．$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ のとき，2 つの円は交わっている．$d = r_1 - r_2$ のとき，2 つの円は内接．$d < r_1 - r_2$ のとき，一方の円がもう一方の円を内包している．

- 両方の円の接線となるものを共通接線と言う．

4.17　トレミーの定理（高校数学 A）

円に内接する四角形 ABCD において，AB·CD+AD·BC=AC·BD が成立する．

5　集合と論理（高校数学 A）

5.1　集合と要素の個数（高校数学 A）

- 集合に属するものを要素と言う．集合 A に要素 a が属しているとき，a∈A と表す．逆に，集合 A に要素 a が属さないとき，a∉A と表す．

- 集合 A が集合 B に属するとき，集合 A は集合 B の部分集合であり，A⊂B と表す．なお，任意の集合 A に対して A⊂A である．A⊂B かつ A⊃B のとき，集合 A と集合 B は等しいと言い，A=B と表す．

- 集合 A と集合 B の両方に属する要素の集合を，集合 A と集合 B の共通集合と言い，A∩B と表す．集合 A と集合 B の少なくとも一方に属する要素の集合を，集合 A と集合 B の和集合と言い，A∪B と表す．

- 例えば，自然数の中の集合を考えるとき，自然数全体を全体集合と考える．全体集合は U で表す．全体集合 U の中にある集合 A に属しない要素の集合を集合 A の補集合と言い，$\overline{\mathrm{A}}$ で表す．

- ある集合について，要素の個数が無限にあるものを無限集合，有限であるものを有限集合と言う．有限集合の要素の個数は $n(\mathrm{A})$ で表す．$n(0)$ であるものを空集合と言い，ϕ で表す．任意の集合 A に対して，$\phi \subset$A である．

5.2　集合に関する公式（高校数学 A）

- $\mathrm{A}\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) = (\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) \cap (\mathrm{A}\cup\mathrm{C}), \mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cup\mathrm{C}) = (\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \cup (\mathrm{A}\cap\mathrm{C})$

- $\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \mathrm{A}$

- $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$（ド・モルガンの法則）

- $n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = n(\mathrm{A}) + n(\mathrm{B}) - n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}), n(\overline{\mathrm{A}}) = n(\mathrm{U}) - n(\mathrm{A})$

- $n(\mathrm{A}) = a$ のとき，A の部分集合は 2^a 個存在する．

5.3　命題と証明（高校数学 A）

- 真偽が決まるものを命題と言う．命題の証明について，偽であることを証明する場合は，その命題を満たさないもの（反例）を 1 つ挙げれば良い．

- 命題は集合と関連づけることができる．例えば，条件 p, q が集合 P,Q に対応するとき，p ならば q であるとき $p \subset q$ であり，p と q が同値であるとき P=Q である．

- 命題 p に対して，$\overline{p}$ を命題 p の否定と言う.「全ての」の否定は「任意の（ある）」,「任意の（ある）」の否定は「全ての」である．

- 命題 $p \Rightarrow q$ に対して，$q \Rightarrow p$ を逆，$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ を裏，$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ を対偶と言う．元の命題と対偶の命題の真偽は一致する．

- 命題 $p \Rightarrow q$ について，q は p であるための必要条件であり，p は q であるための十分条件と言う．また，$p \Leftrightarrow q$ のときは，$q(p)$ は $p(q)$ であるための必要十分条件と言う．
- 命題 p が真であることを証明するために，命題 $\overline{p}$ を真と仮定して矛盾を導き，命題 p が真であるとする論法を背理法と言う．

6 場合の数と確率（高校数学 A・数学 B・数学 C）

6.1 順列・組み合わせ（高校数学 A）

a, b, c, n, r, p, q は $a \geqq 3, b \geqq 2, c \geqq 2, n > 0, r > 0, p > 0, q > 0$ なる整数とする．

- $n(n-1)(n-2)\cdots 1$ を n の階乗と言い，$n!$ で表す．なお，$0! = 1$ と定める．
- n 個の中から r 個のものを選ぶときに，選ぶ順番も区別する場合，順列であり，${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ と表す $(n \leqq r)$．
- n 個のものを平面上に円状に並べる円順列は $(n-1)!$，空間上に円状に並べるじゅず順列は $\dfrac{(n-1)!}{2}$ である．
- 異なる n 個のものから重複を許して r 個とる順列は n^r である（$n > r$ でも良い）．
- n 個の中に，同じものが p 個，別の同じものが q 個，$\cdots\cdots(p+q+\cdots\cdots=n)$ のときの順列は $\dfrac{n!}{p!q!\cdots\cdots}$ である．
- n 個の中から r 個のものを選ぶときに，選ぶ順番を区別しない場合，組み合わせであり，${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ と表す $(n \leqq r)$．
- ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r} = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$
- どの 3 本も同一の点で交わらず，互いに平行ではない n 本の直線があるとき，交点は ${}_n\mathrm{C}_2$ 個，三角形は ${}_n\mathrm{C}_3$ 個存在する．
- m 本の平行線と，他の n 本の平行線で作られる平行四辺形は ${}_m\mathrm{C}_2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2$ 個存在する．
- 異なる n 個のものから重複を許して r 個とる組み合わせは ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$ である（$n > r$ でも良い）．

6.2 二項定理・多項定理（高校数学 A）

a, b, c は実数，n, p, q, r は正の整数とする．

- $(a+b)^n$ の一般項は ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r (r = 0, 1, \cdots\cdots, n)$ である．
- $(a+b+c)^n$ の一般項は $\dfrac{n! a^p b^q c^r}{p!q!r!}(p+q+r=n, p \geqq 0, q \geqq 0, r \geqq 0)$ である．

6.3 確率の基本（高校数学 A・数学 C）

n, r は $n > r$ なる正の整数，p は実数とする．

- ある事象 A が発生する確率を $P(A)$ と表す．$0 \leqq P(A) \leqq 1$ である．
- $P(U) = 1, P(\phi) = 0$ である．また，$P(A)$ が発生しない確率を $P(A)$ の余事象と言い，$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ である．
- $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ である（確率の加法定理）．
- $P(A \cap B) = 0$ となる場合，事象 A と事象 B は独立であると言う．このとき，$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ である．
- n 回の内，確率 p の独立な事象が r 回起こる確率は ${}_n\mathrm{C}_r p^r (1-p)^{n-r}$ である（反復試行の確率）．
- 事象 A が起こったときに事象 B が起こる条件付き確率は $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ である．
- 独立でない事象 A, B がともに起こる確率は $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ である（確率の乗法定理）．

6.4　確率分布（高校数学 A・数学 B・数学 C）

a, b, p, p_n は実数，n, r は正の整数，X, Y は確率変数とする．

- X が値 p をとる確率を $P(X=p)$ と表す．
- X が値 X_n を確率 p_n でとるとき，X の期待値（平均）は $E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k p_k$ である．
- X について，分散は $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$，標準偏差は $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ である．
- $E(aX+b)=aE(X)+b, V(aX+b)=a^2V(X), \sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$
- $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$
- X, Y が互いに独立のとき，$V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)$ である．
- 二項分布とは $P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$ で与えられる分布である．$E(X)=np, V(X)=np(1-p)$, $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$.

7　式と証明・高次方程式（高校数学 II）

7.1　整式の除法（高校数学 II）

a, b は $a\neq 0$ なる実数とする．

- $A(x)\div B(x)$ の商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると，$A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$ である．ここで，$R(x)$ は 0 または $B(x)$ より次数の低い整式になる．
- $P(x)$ を $ax+b$ で割った余りは $P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ である（剰余の定理）．
- $P(x)$ が $ax+b$ で割りきれる $\Leftrightarrow P\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$（因数定理）．
- 整式の因数を見つけるには，最高次の項の係数を a，定数項を b とするとき，$\pm\dfrac{|b|\text{ の正の約数}}{|a|\text{ の正の約数}}$ を代入して調べると良い．

7.2　組み立て除法（高校数学 II）

例えば，ax^2+bx+c を $x-d$ で割ると，

$$
\begin{array}{ccc|l}
a & b & c & \underline{d} \\
d & d(a-d) & d\{b-d(a-d)\} & \\
\hline
a-d & b-d(a-d) & c-d\{b-d(a-d)\} &
\end{array}
$$

より，商は $(a-b)x+b-d(a-b)$，余りは $c-d\{b-d(a-b)\}$ となる（a, b, c, d は $a\neq 0, d\neq 0$ なる実数）．

7.3　分数式（高校数学 II）

A, B, C, D は整式とする．ただし，分母は 0 以外とする．

- $\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\times C}{B\times C}=\dfrac{A\div D}{B\div D}$
- 分数式の分母・分子をその共通因数で割ることを約分と言う．これ以上約分できないものを既約分数式と言う．

- $\dfrac{A}{B} \times \dfrac{C}{D} = \dfrac{AC}{BD}, \dfrac{A}{B} \div \dfrac{C}{D} = \dfrac{AD}{BC}$
- 分数式の加減算は分母を合わせて（通分）行う．$\dfrac{A}{C} \pm \dfrac{B}{D} = \dfrac{DA \pm CB}{CD}$
- 分数式の分子または分母に分数式があるものを繁分数式と言う．
- 多項式と分数式を合わせて有理式と言う．

7.4 等式と不等式の証明（高校数学 II）

a, b, c, d, e, f は実数，A, B, C は整式とする．

- 変数がどのような値をとっても成立する式を恒等式と言う．$ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f$ が x に関する恒等式であるとき，定数の値を定める方法として，$a = d, b = e, c = f$ の連立方程式を解くか（係数比較法），x に適当な異なる 3 つの値を代入して連立方程式を解く方法（数値代入法）がある．数値代入法を用いて解いた場合は，逆が成立するか確認する必要がある．
- 等式 $A = B$ の証明は $A - B = 0$，または，$A = C, B = C$ を示す．
- 不等式 $A > B$ の証明は $A - B > 0$ を示す．なお，$\geqq$ の場合は $=$ となる値も示す．
- $a^2 \geqq 0$（実数の性質）
- $a \geqq 0, b \geqq 0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ である．等号成立は $a = b$ のとき（相加平均・相乗平均の関係）．
- $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geqq (ac + bd)^2$ である．等号成立は $ac = bd$ のとき（シュワルツの不等式）．

7.5 複素数と 2 次方程式（高校数学 II）

a, b, c は $a \neq 0$ なる実数とする（複素数の詳細は別項で取り上げる）．

- $i^2 = -1$ となる数 i を虚数単位と言う．複素数は $a + bi$ の形で表される数である．
- 係数が実数の 2 次方程式の判別式 D が $D < 0$ で，方程式の解の 1 つが $a + bi$ のとき，もう 1 つの解は $a - bi$ である．
- x の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解を α, β とすると，$\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}, \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ である．

7.6 高次方程式・不等式（高校数学 II）

a, b, c, d は $a \neq 0$ なる実数，p, q, r は有理数，$\sqrt{r}$ は無理数とする．

- 3 次以上の方程式を解く場合，因数定理等を利用する．
- x の 3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解を α, β, γ とすると，
  $\alpha + \beta + \gamma = -\dfrac{b}{a}, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \dfrac{c}{a}, \alpha\beta\gamma = -\dfrac{d}{a}$ である．(※歯止め規定)
- 有理係数の整方程式が $p + q\sqrt{r}$ を解にもてば，$p - q\sqrt{r}$ も解である．
- $(x-a)(x-b)(x-c) > 0 \Leftrightarrow a < x < b, x > c$ で，$(x-a)(x-b)(x-c) < 0 \Leftrightarrow x > a, b < x < c$ である（$a < b < c$ のとき）．

8　図形と方程式（高校数学 II）

8.1　点と座標（高校数学 II）

xy 平面上の点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, 点 $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, 点 $\mathrm{C}(x_3, y_3)$ を考える．

- AB= $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- AB を $m : n$ の比に分ける点の座標は $\left(\dfrac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \dfrac{ny_1 + my_2}{m + n}\right)$ である（$m+n \neq 0, mn > 0$ のとき内分で $mn < 0$ のとき外分）．
- $\triangle$ABC の重心の座標は $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ であり，面積は $\dfrac{|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|}{2}$ である．

8.2　直線の方程式（高校数学 II）

xy 平面上で考える．a, b は $a \neq 0, b \neq 0$ なる実数，k は定数とする．

- 点 (x_1, y_1) を通り，傾き m の直線の方程式は，$y - y_1 = m(x - x_1)$ である．
- 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線の方程式は $(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$ である．
- 2 直線 $ax + by + c = 0, dx + ey + f = 0$ の交点を通る直線の方程式は $ax + by + c + k(dx + ey + f) = 0$ である．
- 2 直線 $y = m_1x + n_1, y = m_2x + n_2$ について，$m_1 = m_2$ であれば 2 つの直線は平行である．さらに $n_1 = n_2$ であれば一致する．一方，$m_1m_2 = -1$ であれば 2 つの直線は直交する．
- 点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離は $\dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ である．

8.3　円の方程式（高校数学 II）

xy 平面上で考える．l, m, n は実数とする．

- 中心の座標が (a, b)，半径 r の円の方程式は $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ である．円周上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$ である．
- 円の方程式は $x^2 + y^2 + lx + my + n$ とも表される．円を表す条件は $l^2 + m^2 - 4n > 0$ であり，このとき，円の中心の座標は $\left(-\dfrac{l}{2}, -\dfrac{m}{2}\right)$，半径は $\dfrac{\sqrt{l^2 + m^2 - 4n}}{2}$ となる．

8.4　円と直線（高校数学 II）

xy 平面上で考える．

- 円と直線の共有点は，2 つの方程式を使って x か y を消去し，その 2 次方程式の判別式 D で求める．$D > 0$ ならば異なる 2 点で交わり，$D = 0$ ならば接し，$D < 0$ ならば共有点はない．
- 2 円 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ が 2 点で交わるとき，その 2 点を通る円または直線の方程式は $x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + dx + ey + f) = 0$ である．$k = -1$ のとき直線になり，$k \neq -1$ のとき円になる．

8.5 軌跡（高校数学 II）

定点 A,B からの距離が一定の点の軌跡は AP:BP$= m:n$ によって決まる．$m=n$ のときは線分 AB の垂直二等分線である．$m \neq n$ のときは，線分 AB を $m:n$ にそれぞれ内分・外分する点を直径の両端とする円となる（アポロニウスの円）．

8.6 不等式と領域（高校数学 II）

xy 平面上で考える．

- 曲線 $f(x)$ について，$y > f(x)$ は $y = f(x)$ の上方を，$y < f(x)$ は $y = f(x)$ の下方を表す．境界線上の点は含まない．不等号が $\geqq, \leqq$ ならば，境界線上の点を含む．
- $x^2 + y^2 < r^2$ ならば円の内側を表し，$x^2 + y^2 > r^2$ ならば円の外側を表す．境界線上の点は含まない．不等号が $\geqq$ $, \leqq$ ならば，境界線上の点を含む．

8.7 グラフの移動（高校数学 I・数学 II）

xy 平面上で $y = f(x)$ のグラフの移動を考える．

- x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動すると，$y - q = f(x - p)$ となる．
- x 軸に対して対称移動すると $-y = f(x)$ となる．
- y 軸に対して対称移動すると $y = f(-x)$ となる．
- 原点に対して対称移動すると $-y = f(-x)$ となる．
- 点 (a,b) に対して対称移動すると $2b - y = f(2a - x)$ となる．

9 指数関数と対数関数（高校数学 II）

9.1 指数の拡張（高校数学 II）

a, b は実数，r, s は有理数，m, n, p は正の整数とする．

- $a^0 = 1, a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}, a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$
- $a^r a^s = a^{r+s}, (a^r)^s = a^{rs}, (ab)^r = a^r b^r$

9.2 指数関数（高校数学 II）

xy 平面上で考える．

- $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ のグラフは，定義域が実数全体，値域が正の数全体になる．$0 < a < 1$ ならば単調減少，$a > 1$ ならば単調増加する．必ず 2 点 $(0,1), (1,a)$ を通り，x 軸が漸近線となる．
- $a > 0, b > 0$ とする．$x > 0$ ならば $a > b \Leftrightarrow a^x > b^x$，$x < 0$ ならば $a > b \Leftrightarrow a^x < b^x$ である．
- $a > 1$ のとき，$x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$，$0 < a < 1$ のとき，$x < y \Leftrightarrow a^x > a^y$ である．

9.3　対数の定義と性質（高校数学 II）

a, b, P, Q, t は $a \neq 1, a > 0, b \neq 1, b > 0, P > 0, Q > 0$ なる実数とする．

- $a^r = P \Leftrightarrow r = \log_a P$ で，a を底，P を真数と言う．真数は必ず 0 より大きい．
- $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1, \log_a PQ = \log_a P + \log_b Q, \log_a \dfrac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q, \log_a P^t = t \log_a P$
- $\log_a P = \dfrac{\log_b P}{\log_b a}$（底の変換公式）

9.4　対数関数（高校数学 II）

xy 平面上で考える．

- $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ のグラフは，定義域が正の数全体，値域が実数全体になる．$0 < a < 1$ ならば単調減少，$a > 1$ ならば単調増加する．必ず 2 点 $(1, 0), (a, 1)$ を通り，y 軸が漸近線となる．
- $a > 1$ のとき，$0 < x < y \Leftrightarrow \log_a x < \log_a y, 0 < x < y \Leftrightarrow \log_a x > \log_a y$ である．

9.5　常用対数（高校数学 II）

$n \leqq \log_{10} x \leqq n + 1$ ならば，x の整数部分は $(n + 1)$ 桁である．一方，$-(n + 1) \leqq \log_{10} x \leqq -n$ ならば，x の小数第 $(n + 1)$ 位に初めて 0 でない数字が現れる（x は実数，n は正の整数）．

10　数列（高校数学 B）

数列の項は全て実数とする．

10.1　等差数列と等比数列（高校数学 B）

- 等差数列 $\{a_n\}$ は初項を a，公差を d とすると，一般項は $a_n = a + (n - 1)d$ で表され，第 n 項までの和は $S_n = \dfrac{n\{2a + (n - 1)d\}}{2}$ で表される．
- 等比数列 $\{a_n\}$ は初項を a，公比を r とすると，一般項は $a_n = ar^{n-1}$ で表され，第 n 項までの和は $r \neq 1$ のとき，$S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$，$r = 1$ のとき $S_n = na$ で表される．
- $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}, \cdots\cdots$ が順に等差数列のとき，$a, b, c, \cdots\cdots$ を調和数列と言う．
- a, b, c がこの順に等差数列のとき，$2b = a + c$ である（等差中項）．また，等比数列のとき，$b^2 = ac$ である（等比中項）．さらに，調和数列のとき，$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{b}$ である．

10.2　数列の和（高校数学 B）

i, n は $n \geqq i$ を満たす正の整数，c, d は定数とする．

- 数列 $\{a_n\}$ の第 i 項から第 n 項までの和を $\displaystyle\sum_{k=i}^{n} a_k$ と表す．
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (ca_k \pm db_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k \pm d\sum_{k=1}^{n} b_k$

- $\sum_{k=1}^{n} c = nc, \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2, \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$
- $\sum_{k=i}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{i-1} a_k (n > i > 1)$
- 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k (n \geqq 2)$ である．

10.3　和と一般項（高校数学 B）

数列 $\{a_n\}$ について，第 n 項までの和を S_n とすると，$a_1 = S_1, a_n = S_n - S_{n-1} (n \geqq 2)$ である．

10.4　漸化式と数列（高校数学 B）

p は $p \neq 0$ なる実数とする．

- 数列の各項目の値を表したものが漸化式である．
- 等差数列は $a_{n+1} = a_n + d$，等比数列は $a_{n+1} = ra_n$，階差数列は $a_{n+1} = a_n + f(n)$ の形で表される．
- $a_{n+1} = pa_n + q (p \neq 1)$ は，$a_{n+1} - k = p(a_n - k)$（ただし $k = pk + q$）と変形し，数列 $\{a_n - k\}$ の一般項を求める．
- $pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$ は，$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$（ただし α, β は x に関する 2 次方程式 $px^2 + qx + r = 0$ の解）と変形し，数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ の一般項を求める．

10.5　数学的帰納法（高校数学 B）

命題 P が全ての n において成立することを示すには,

- $n = 1$ のときに P が成立する．
- $n = k$ のときに P が成立すると仮定すると，$n = k + 1$ のときにも P が成立する．

ことを示せば良い（n, k は正の整数）.

11　ベクトル（高校数学 B）

11.1　ベクトルの基本性質（高校数学 B）

k, l は実数とする．

- 向きと大きさで定まる量をベクトルと言う．線分 AB において，点 A から点 B に向かう「向き」をつけて考えるとき，その線分を有向線分 AB と言い，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表記する．A を始点，B を終点と言う．また，有向線分 AB の長さを大きさと言い，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ と表記する．2 つの有向線分 AB,CD の一方を平行移動して他方に重ね合わせることができるとき，これらの有向線分は向きが同じで大きさが等しいから，同じベクトルを表している．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ である．大きさが 0 であるベクトルを零ベクトルと言い，$\overrightarrow{0}$ で表す．
- $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$（交換法則）
- $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$（結合法則）
- $(kl)\overrightarrow{a} = k(l\overrightarrow{a}), (k+l)\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{a} + l\overrightarrow{a}, k(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$

- $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$（$\theta$ は $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角で $0\leqq\theta\leqq\pi$）である．左辺のことをベクトルの内積と言う．演算記号 $\cdot$ は省略できない．
- $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|^2$
- $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}, (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}, (k\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot(k\overrightarrow{b})=k(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})$
- $\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\overrightarrow{a}=k\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$
- xy 平面上で $\overrightarrow{a}$ が x 軸，y 軸の正の向きとそれぞれ角 α,β をなすとき，$\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|(\cos\alpha,\cos\beta)$ かつ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$ が成立する．このとき，$\cos\alpha,\cos\beta$ を $\overrightarrow{a}$ の方向余弦と言う（※高校数学範囲外）．

11.2　ベクトルの成分（高校数学 B）

- 平面ベクトルの成分は $\overrightarrow{a}(a_1,a_2), \overrightarrow{b}(b_1,b_2)$，空間ベクトルの成分は $\overrightarrow{c}(c_1,c_2,c_3), \overrightarrow{d}(d_1,d_2,d_3)$ のように表される．
- 成分は代数と同じように計算できる．
- 1 つの成分のみが 1 で，残りの成分が 0 であるベクトルを基本ベクトルと言う．一方，絶対値が 1 となるベクトルを単位ベクトルと言う．
- $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2, \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}=c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3$
- $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}, |\overrightarrow{c}|=\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}$

11.3　ベクトルと図形（高校数学 B）

点 A,B,C について考える．k は実数とする．

- $\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\overrightarrow{0}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}}$
- 3 点 A,B,C が同一線上にある $\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
- 線分 AB を $m:n$ の比に分ける点 P があるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$（$m+n\neq 0, mn>0$ のとき内分で $mn<0$ のとき外分）である．
- $\triangle$ABC の重心 G は $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$ である．
- $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}}{2}$

11.4　平面のベクトル方程式（高校数学 B）

点 A，点 B，点 P の位置ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{p}$ とし，s,t は実数とする．

- 点 A を通り，$\overrightarrow{d}$ に平行な直線は $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{d}$ である．
- 点 A を通り，$\overrightarrow{d}$ に垂直な直線は $\overrightarrow{d}\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a})=0$ である．
- 2 点 A,B を通る直線は $\overrightarrow{p}=(1-t)\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ である．
- 線分 AB の点 P は，$\overrightarrow{p}=s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ である $(s+t=1, s\geqq 0, t\geqq 0)$．
- 中心が点 A で半径 r の円は $|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}|=r$ である．
- 点 A と点 B を直径の両端とする円は $(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a})\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b})=0$ である．
- $\triangle$ABC の周および内部の点 P のベクトル表示は，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}(0\leqq s+t\leqq 1, s\geqq 0, t\geqq 0)$ である．

11.5　空間の方程式（高校数学 B）

xyz 空間で考える．a, b, c は $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ なる実数，点 P の位置ベクトルを $\overrightarrow{p}$ とする．

- 空間内に定点 O を定め，O で互いに直交する 3 直線 Ox,Oy,Oz を引き，これらの各直線を O を原点とする数直線と考えたとき，Ox,Oy,Oz を座標軸（直交座標軸）と言い，座標軸の定められた空間を座標空間と言う．このとき，点 O を座標空間の原点と言い，Ox,Oy,Oz をそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸と言う．
- x 軸と y 軸を含む平面を xy 平面，y 軸と z 軸を含む平面を yz 平面，z 軸と x 軸を含む平面を zx 平面と言う．また，点 (a, b, c) の a は x 座標，b は y 座標，c は z 座標と言う．
- 点 A$(a, 0, 0)$，点 B を $(0, b, 0)$，点 C を $(0, 0, c)$ を考える．点 A を通り，x 軸に直交する平面の方程式は $x = a$ で表される．点 B を通り，y 軸に直交する平面の方程式は $y = b$ で表される．点 C を通り，z 軸に直交する平面の方程式は $z = c$ で表される．
- 一直線上にない点 A,B,C は 1 つの平面を定め，これを平面 ABC と言う．
  点 P が平面 ABC 上にある $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s, t が存在
- 空間上の点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax + by + cz + d = 0$ の距離は $\dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ である（※高校数学範囲外）．

11.6　空間のベクトル方程式（高校数学 B）

xyz 空間で考える．点 A の位置ベクトルを $\overrightarrow{a}$ とする．

- 直線のベクトル方程式は平面のベクトル方程式と同じである．
- 中心が点 A で半径 r の球は $|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}| = r$ である．
- xyz 空間で中心の座標が (a, b, c) で半径 r の球の方程式は $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ である．

12　極限（高校数学 III）

12.1　極限とその性質（高校数学 III）

a, k, l は実数とする．

- 変数 x が限りなく α に近づくときに $f(x)$ が β の値に近づくことを，$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$ と表す．このとき，β を極限値と言う．なお，極限値の計算をした結果，特定の値をとる場合は収束と言い，$+\infty$ や $-\infty$ になった場合，また振動（符号が変動する）した場合は発散と言う．振動した場合は極限値はない．
- $+\infty$ や $-\infty$ は数ではない．
- $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$（アルキメデスの原理）
- $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \alpha, \lim_{x \to a} g(x) = \beta$ であるとき，
  $\displaystyle\lim_{x \to a} \{kf(x) \pm lg(x)\} = k\alpha \pm l\beta, \lim_{x \to a} f(x)g(x) = \alpha\beta, \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} (\beta \neq 0)$ である．
- $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ で $g(\alpha) = 0$ ならば，$f(\alpha) = 0$ である．
- $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \alpha, \lim_{x \to a} g(x) = \beta$ のとき，$f(x) < g(x) \Rightarrow \alpha \leqq \beta$ である．一方，$f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ のとき，$\alpha = \beta \Rightarrow \displaystyle\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$ である（はさみうちの原理）．

12.2 無限等比数列（高校数学 III）

- 無限に続く公比 r の等比数列 $\{r_n\}$ について，$n \to \infty$ となるときの極限値は，$r > 1$ のとき $+\infty$，$r = 1$ のとき 1，$|r| < 1$ のとき 0 である．$r \leqq -1$ のときは振動する．
- 等比数列 $\{r_n\}$ が収束する $\Leftrightarrow -1 < r \leqq 1$
- 数列 $\{a_n\}$ について，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ である．
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散
- 初項 $a(a \neq 0)$ の無限等比数列 $\{r_n\}$ について，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ は，$|r| < 1$ ならば $\dfrac{a}{1-r}$ に収束し，$|r| \geqq 1$ ならば発散する．

12.3 分数関数（高校数学 III）

xy 平面上で $y = p + \dfrac{r}{x-q}(x - q \neq 0)$ で表され，形は直角双曲線になる．漸近線の方程式は $x = q, y = p$ である．

12.4 無理関数（高校数学 III）

xy 平面上で $y = k\sqrt{f(x)}$は $y^2 = k^2 f(x)$ のグラフに対して，$k > 0$ ならば x 軸の上半分，$k < 0$ ならば x 軸の下半分の形になる．

12.5 逆関数と合成関数（高校数学 III）

xy 平面上で考える．a, b は実数とする．

- $y = f(x)$ について，$x = f(y)$ となる $f(y)$ は $f(x)$ の逆関数である．
- 関数 $f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ で表す．このとき，$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$ である．
- $y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ のグラフは直線 $y = x$ に関して対称である．
- $f(x)$ と $f^{-1}(x)$ では定義域と値域が入れ替わる．
- 関数 $f(x)$ と $g(x)$ があるとき，$g(f(x))$ を $(g \circ f)(x)$ と表記する．一般に，$f \circ g \neq g \circ f$ である．
- $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
- $(f \circ g)(x) = x \Leftrightarrow f(x) = g^{-1}(x)$

12.6 右側極限と左側極限（高校数学 III）

関数 $f(x)$ を実数 a に，$a < x$ の方から a に近づける場合，これを右側極限と言い，$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ で表す．一方，$a > x$ の方から a に近づける場合，これを左側極限と言い，$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)$ で表す．実数 a に近づけたときに，右側極限と左側極限の値が異なる場合，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ は存在しない．

12.7 三角関数の極限（高校数学 III）

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = 1$（$x$ の単位はラジアン）

12.8　指数関数・対数関数の極限（高校数学 III）

e は自然対数の底，h は実数とする．

- $a > 0$ のとき，$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty, \lim_{x\to+0} \log_a x = -\infty$ である．
- $0 < a < 1$ のとき，$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty, \lim_{x\to+0} \log_a x = 0$ である．
- $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1, \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

12.9　関数の連続性（高校数学 III）

$f(a)$ と $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し，かつ，$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ のとき，$f(x)$ は $x = a$ で連続である（a は実数）．

12.10　中間値の定理（高校数学 III）

$a \leqq x \leqq b$ で連続な関数 $f(x)$ は，その区間内で $f(a)$ から $f(b)$ の間の任意の値をとる．$f(a)f(b) < 0$ ならば，方程式 $f(x) = 0$ を満たす実数解が，$a < x < b$ の範囲に少なくとも 1 つはある（a, b は実数）．

13　微分法と積分法（高校数学 II・数学 III・範囲外）

13.1　導関数の定義（高校数学 II）

xy 平面上の関数 $y = f(x)$ について，$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ を $f'(x)$ とする．この操作を微分と言い，$f'(x)$ を導関数（$f(x)$ の微分係数）と言う．なお，導関数の表記は $y', \frac{d}{dx}f(x)$ とすることもある．極限値が存在しないとき $f(x)$ は微分不可能である．

13.2　導関数の計算（高校数学 II・数学 III）

h, k は定数とする．

- $\{hf(x) \pm kg(x)\}' = hf'(x) \pm kg'(x)$
- $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$
- $y = f(g(x))$ の $\frac{dy}{dx}$ は，$g(x) = u$ とおくと，$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ で計算される（合成関数の微分）．
- $x = f(t), y = g(t)$ で表された関数の $\frac{dy}{dx}$ は $\frac{g'(t)}{f'(t)}$ で計算される（媒介変数で表示された関数の微分）．
- y が x の関数であるとき，$\frac{d}{dx}f(y) = f'(y)\frac{dy}{dx}$ である（逆関数の微分）．
- 与えられた関数を y とおいて両辺の対数をとり，両辺を x で微分して導関数を求める方法を対数微分法と言う．

13.3　関数の導関数（高校数学 II・数学 III）

a, c は $a > 0$ なる定数，e は自然対数の底，n は実数とする．

- $(c)' = 0, (x^n)' = nx^{n-1}$
- $(\sin f(x))' = f'(x)\cos f(x), (\cos f(x))' = -f'(x)\sin f(x), (\tan f(x))' = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
- $(e^{f(x)})' = f'(x)e^{f(x)}, (a^{f(x)})' = f'(x)a^{f(x)}\log a$
- $(\log|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}, (\log_a|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)\log a}$

13.4　高次導関数（高校数学 III）

関数 $f(x)$ を微分した $f'(x)$ をさらに微分すると $\{f'(x)\}' = f''(x)$ になる．これを第 2 次導関数と言う．第 3 次以降も同様に計算する．第 n 次導関数を $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ のように表記し，高次導関数と言う（n は 2 以上の整数）．

13.5　接線と法線（高校数学 II・数学 III）

xy 平面上で曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ について考える．法線とは接線に垂直な直線のことである．

- 接線の方程式は $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ である．
- 法線の方程式は $y - f(a) = -\dfrac{1}{f'(a)}(x - a)(f'(a) \neq 0)$ である．なお，$f'(a) = 0$ でも法線が存在することがある．

13.6　平均値の定理（高校数学 III）

a, b は実数とする．関数 $f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続であり，$a < x < b$ で微分可能であれば，$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ かつ $a < c < b$ を満たす実数 c が存在する．特に，$f(a) = f(b)$ であれば $f'(c) = 0$ となる（ロルの定理）．

13.7　関数の変化とグラフ（高校数学 II・数学 III）

xy 平面上で考える．a, b は実数とする．

- 関数 $f(x)$ について，$f'(x) > 0$ である区間で $f(x)$ は単調増加，$f'(x) < 0$ である区間で $f(x)$ は単調減少，$f'(x) = 0$ である区間で $f(x)$ は定数をとる．
- $f(x)$ が増加から減少に移る点を極大値，減少から増加に移る点を極小値と言う．また，$f(x)$ が $x = a$ で極値をとる $\Rightarrow f'(a) = 0$（$x = a$ で微分可能なとき）．
- $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) < 0 \Rightarrow f(a)$ は極大値,$f'(a) = 0$ かつ $f''(a) > 0 \Rightarrow f(a)$ は極小値
- $f''(x) > 0$ である区間で $y = f(x)$ は下に凸，$f''(x) < 0$ である区間で $y = f(x)$ は上に凸である．凹凸が変わる点を変曲点と言う．
- $\displaystyle\lim_{x \to a \pm 0} f(x) = \pm\infty$ のとき，直線 $x = a$ が漸近線となる．また，$\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty}\{f(x) - (ax + b)\} = 0$ のとき，直線 $y = ax + b$ が漸近線となる（どちらかの符号が成り立てば良い）．
- 関数のグラフは，数学 II では極値と増減を求めれば良い．数学 III では，曲線の凹凸と漸近線まで調べる必要がある．ただし，問題に指示がある場合はこの限りではない．

13.8　増減表の例（高校数学 II・数学 III）

a, b は $a < b$ なる実数とする．関数 $f(x)$ は a で極大値，b で極小値をとり，全ての区間で連続であるとする（数学 II）．

x	$\cdots\cdots$	a	$\cdots\cdots$	b	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$

a, b, c, d は $a < b < c < d$ なる実数とする．関数 $f(x)$ は a, c で変曲点となり，b で極大値，d で極小値をとる．また，全ての区間で連続であるとする（数学 III）．

x	$-\infty$	$\cdots\cdots$	a	$\cdots\cdots$	b	$\cdots\cdots$	c	$\cdots\cdots$	d	$\cdots\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$	⤴	$f(a)$	↱	$f(b)$	⤵	$f(c)$	↳	$f(d)$	⤴	$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$

13.9　速度と加速度（高校数学 III）

xy 平面上を運動する点 P の時刻 t における座標が $x = f(t), y = g(t)$ で表されるとき，時刻 t における点 P の速度は $(f'(t), g'(t))$，加速度は $(f''(t), g''(t))$ である．

13.10　近似式（高校数学 III）

Δx は実数 a に比べて十分に小さい実数とする．

- $f(a + \Delta x) \qquad f(a) + f'(a)\Delta x$（$\Delta x$ が 1 次式の場合）
- $f(a + \Delta x) \qquad f(a) + f'(a)\Delta x + \dfrac{f''(a)(\Delta x)^2}{2}$（$\Delta x$ が 2 次式の場合）

13.11　不定積分と定積分（高校数学 II）

a, b は実数，C は積分定数とする．

- 関数 $f(x)$ について原始関数 $F(x)$ を求めることを積分と言う．
- $F'(x) = f(x)$ のとき，$F(x)$ を被積分関数と言い，$f(x)$ の不定積分の 1 つである．
- $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$（微分積分学の基本定理）

13.12　不定積分の計算（高校数学 II・数学 III）

a は $a > 0$ なる実数，e は自然対数の底，n は実数，C は積分定数とする．

- $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C(n \neq -1), \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$
- $\displaystyle\int \sin f(x)\,dx = -\frac{\cos f(x)}{f'(x)} + C, \int \cos f(x)\,dx = \frac{\sin f(x)}{f'(x)} + C, \int \frac{dx}{\cos^2 f(x)} = \frac{\tan f(x)}{f'(x)} + C$
- $\displaystyle\int e^{f(x)}\,dx = \frac{e^{f(x)}}{f'(x)} + C, \int a^{f(x)}\,dx = \frac{a^{f(x)}}{f'(x)\log a} + C$
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$

13.13　定積分の基本性質（高校数学 II・範囲外）

$a, b, c, h, k, \alpha, \beta$ は $a < c < b$ なる実数，k は定数，n は正の整数とする．

- $\displaystyle\int_a^b \{hf(x) \pm kg(x)\}\,dx = h\int_a^b f(x)\,dx \pm k\int_a^b g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0, \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- $f(x)$ が偶関数のとき $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ で，$f(x)$ が奇関数のとき $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ である．
- $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \int_0^a \{f(x) + f(2a-x)\}\,dx = \int_0^{2a} f(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$
- $f(x) \geqq g(x)$ のとき，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$ である．
- $\displaystyle\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2\,dx\right)$ である．等号成立は $g(x) = kf(x)$ のとき（シュワルツの不等式）．
- $\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx (n = 0, 1, 2 \cdots\cdots)$ について，$I_0 = \dfrac{\pi}{2}, I_1 = 1$ である．また，n が偶数のとき，$I_n = \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots\cdots \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$ であり，n が 3 以上の奇数のとき，$I_n = \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots\cdots \dfrac{2}{3}$ である（ワリスのサイン・コサイン公式）．

13.14　置換積分法・部分積分法（高校数学 III）

a, b, α, β は実数とする．

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt (x = g(t), a = g(\alpha), b = g(\beta))$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$

13.15　微分法と定積分の関係（高校数学 II・数学 III）

$f(t)$ の原始関数を $F(t)$ とすると，$\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = F(v(x)) - F(u(x))$ であり，右辺を x で微分すると $F'(v(x))v'(x) - F'(u(x))u'(x)$ となる．

13.16　定積分と和の極限（高校数学 III）

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}, x_k = a + k\Delta x$ とすると，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$ である（a, b は実数，n は正の整数）．

13.17　面積（高校数学 II）

xy 平面上で考える．$a \leqq x \leqq b$ において，2 曲線 $y = f(x), y = g(x)$ に囲まれる部分の面積は $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$ である．

13.18　体積（高校数学 III）

xy 平面上で考える．

- 立体の断面積が $S(x)(a \leqq x \leqq b)$ で表されるとき，体積は $\displaystyle\int_a^b S(x)\,dx$ である．
- 曲線 $y=f(x)(a \leqq x \leqq b)$ と x 軸に囲まれる部分を x 軸の周りに回転させてできる回転体の体積は $\displaystyle\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$ である．
- 回転軸が座標軸でないときは，グラフを平行移動して座標軸に合わせる．

13.19　曲線の長さ（高校数学範囲外）

xy 平面上で考える．a,b は実数とする．

- 曲線 $y=f(x)(a \leqq x \leqq b)$ の長さは $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ である．
- 曲線 $x=f(t), y=g(t)(a \leqq t \leqq b)$ の長さは $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ である．

13.20　速度と道のり（高校数学範囲外）

数直線上を運動する点 P の速度 v が時刻 t の関数 $f(t)$ で表され，$t=a$ のときの P の座標が k のとき，時刻 b における P の座標は $\displaystyle k+\int_a^b f(t)\,dt$，$t=a$ から $t=b$ までの P の位置の変化量は $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$，$t=a$ から $t=b$ までの P の道のりは $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ で表される（a,b は $a>b$ なる実数）．

14　数値計算（高校数学 B）

ここででてくる文字は全て実数とする．

14.1　近似値と誤差（高校数学 B）

真の値 A の近似値 a に対して，$a-A$ を近似値 a の誤差と言う．また，ある小さい正の数 ε に対して $|a-A| \leqq \varepsilon$ が成り立つとき，ε を近似値 a の誤差の限界と言う．さらに，$\dfrac{a-A}{A}$ を相対誤差と言う．

14.2　二分法（高校数学 B）

a,b,α は実数とする．関数 $f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続であり，$f(x)=0$ がただ 1 つの解 α をもち，さらに $c=\dfrac{a+b}{2}$ とする．$f(c)<0$ ならば $c<\alpha<b$，$f(c)>0$ ならば $a<\alpha<c$，$f(c)=0$ ならば $\alpha=c$ である．

14.3　ニュートン法（高校数学 B）

$f(x)=0$ の解を α とする．$f'(a_1) \neq 0$ なる初期値 a_1 を選び，$a_{n+1}=a_n-\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ を繰り返し用いると，a_n は α に近づく．

14.4　台形公式（高校数学 B）

n は正の整数とする．$f(x)$ を $a \leqq x \leqq b$ で n 等分し，$h = \dfrac{b-a}{n}, y_k = f(a+kh)$ とおくと，

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \quad \frac{h\{y_0 + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + y_n\}}{2}$ となる．

14.5　シンプソンの公式（高校数学 B）

n は正の整数とする．$f(x)$ を $a \leqq x \leqq b$ で $2n$ 等分し，$h = \dfrac{b-a}{2n}, y_k = f(a+kh)$ とおくと，

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \quad \frac{h\{y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots\cdots + y_{2n-2}) + y_{2n}\}}{3}$ となる．

15　複素数と複素数平面（高校数学 II・範囲外）

i は虚数単位とする．

15.1　複素数の演算（高校数学 II）

a, b, c, d は実数，z, α, β は複素数とする．

- 複素数に大小関係は定義されない．
- $a + bi = c + di$ のとき，$a = c, b = d$ である．
- $(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i, (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$
  $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i (c+di \neq 0)$
- $z = a + bi$ において，$a = 0$ なら z は純虚数である．
- $z = a + bi$ に対して，$a - bi$ を z に対する共役な複素数と言い，$\overline{z}$ で表す．
- α, β に対して，$\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{\alpha} \pm \overline{\beta}, \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\ \overline{\beta}, \overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)} = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$ である．
- $z = a + bi$ において，絶対値 $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ である．このとき，$|z| = |-z| = |\overline{z}|$ である．また，$z\overline{z} = |z|^2$ である．
- α, β に対して，$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|, \left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ である．
- $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ または $\beta = 0$

15.2　極形式（高校数学範囲外）

a, b は実数，n は正の整数，z は複素数とする．

- $z = a + bi$ は $r(\cos\theta + i\sin\theta) \left(r = |z|, \cos\theta = \dfrac{a}{r}, \sin\theta = \dfrac{b}{r}\right)$ の形で表される．なお，θ のことを z の偏角と言い，$\arg z$ で表す．
- 2 つの複素数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ があるとき，
  $z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$ であり，$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$ である．
- $r(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$（ド・モアブルの定理）
- z の n 乗根は $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ のとき，$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\theta+2\pi k}{n}\right)(k = 0, 1, \cdots\cdots, n-1)$ である．

15.3 複素数平面（高校数学範囲外）

点 A を (α)，点 B を (β)，点 C を (γ)，点 D を (δ) とする．

- 複素数平面（複素平面）とは，縦軸が実軸，横軸が虚軸になった平面である．
- 線分 AB を $m:n$ の比に分ける点は $\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}$ である（$m+n\neq 0, mn>0$ のとき内分で $mn<0$ のとき外分）．
- $|z-\alpha|=|z-\beta|$ は AB を結ぶ線分の垂直二等分線を表す.
- $|z-\alpha|=r$ は点 A を中心とする半径 r の円を表す.
- $\angle$BAC$=\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$
- A,B,C が一直線上にある $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数
- AB//CD$\Leftrightarrow$ $\dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ が実数．AB$\perp$CD$\Leftrightarrow$ $\dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ が純虚数.
- 点 A を点 B の周りに角 θ だけ回転した点が C であるとき，$\gamma=(\alpha-\beta)(\cos\theta+i\sin\theta)+\beta$ である．

16 行列とその応用（高校数学 C・範囲外）

行列の成分は全て実数とする．

16.1 行列の定義（高校数学 C）

数や文字，数字を長方形に配列してかっこでくくったもので，配列された数や文字を行列の成分と言う．成分の横の並びを行，縦の並びを列と言う．m 個の行と n 個の列からなる行列を m 行 n 列の行列または $m\times n$ 行列と言う．特に，$m=n$ のときは n 次の正方行列と言う．行列 A の第 i 行と第 j 列の交点にある成分を (i,j) 成分と言い，a_{ij} と表す．なお，1 行だけからなる行列を行ベクトル，1 列だけからなる行列を列ベクトルと言い，成分の個数はベクトルの次元となる．成分が全て 0 の行列を零行列と言い，O で表す．行列 A,B がともに m 行 n 列のとき A と B は同じ型である．さらに，任意の (i,j) 成分が等しいときは $A=B$ と表す．また，任意の i について (i,i) 成分が 1 で，他の成分が 0 である行列を単位行列と言い，E で表す（m,n,i,j は正の整数）．

16.2 行列の演算（高校数学 C・範囲外）

a,b,c,d,i,j,n は正の整数，k,l,p,q,x は実数，A,B,C は行列とする．

- A,B が同じ型のとき，$A\pm B$ が定義され，計算結果の行列が C であるとき，C の成分は $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$ である．
- A の各成分を k 倍した行列を kA で表す.
- $A+B=B+A$（交換法則）$,(A+B)+C=A+(B+C)$（結合法則），
  $k(l)A=(kl)A,(k+l)A=kA+lA,k(A+B)=kA+kB,A+O=A,A-A=O,0A=O,kO=O$
- A が $a\times b$ 行列，B が $c\times d$ 行列であり，$b=c$ ならば積 AB が定義される．このとき，AB は $a\times d$ 行列となる．AB の (i,j) 成分は，A の第 i 行ベクトルと B の第 j 列ベクトルの積である．
- $(kA)B=A(k)B=k(AB),(AB)C=A(BC)$（結合法則），
  $(A+B)C=AC+BC,A(B+C)=AB+AC$（分配法則）$,AE=EA=A,AO=OA=O$
- 一般に $AB\neq BA$ であり，$AB=BA$ ならば行列 A,B は交換可能（可換）である．また，$A\neq O,B\neq O$ で $AB=O$ となるとき，行列 A,B は零因子である．

- $A=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ について，$A^2-(e+h)A+(eh-fg)E=O$ である（ハミルトン・ケーリーの定理）.

- 任意の i について (i,i) 成分が 0 以外，他の成分が 0 である行列を対角行列と言う．対角行列を n 乗した行列は (i,i) 成分が n 乗され，他の成分は 0 のままである．

- 任意の行列 A の n 乗を求める方法は，A^n を推定して数学的帰納法で証明する方法の他に，ハミルトン・ケーリーの定理を使って $A^2-aA+bE=0$ を導く方法がある．このとき，x^n を x^2-ax+b で割ったときの余りを $px+q$ とおき，p,q を求める．A^nを $A^2-aA+bE$ で割った余りは $pA+qE$ となり，これが求めるものである．

16.3 逆行列（高校数学 C）

A,B,X は行列，E は単位行列とする．

- $AX=XA=E$ を満たす X を A の逆行列と定義し，A^{-1} と表記する．

- $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，$ad-bc\neq 0$ のとき，$A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ である．$ad-bc=0$ のときは逆行列が定義されない．

- $AA^{-1}=A^{-1}A=E, (A^{-1})^{-1}=A, (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

- $AB=E\Rightarrow B=A^{-1}, A=B^{-1}$

- $AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B, XA=B\Rightarrow X=BA^{-1}$

16.4 行列の基本変形（高校数学 C）

2 つの行を入れ替えたり，任意の行に 0 以外の実数をかけたり，ある行に他の行の実数倍を加えることを行列の基本変形と言う．

16.5 連立 1 次方程式（高校数学 C）

- $ax+by=p, cx+dy=q$ は行列を用いて $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ と表される．これを $AX=P$ と対応させると，方程式の解を求めることは行列 X を求めることに他ならない．ただし，A が逆行列をもたないとき，$aq-cp\neq 0$ または $bq-dp\neq 0$ で解なしとなり，$aq-cp=bq-dp=0$ のとき，解は無数にある．

- 上の連立 1 次方程式について，行列に基本変形を施して $EX=P$ の形に変形すると，行列 P は x,y の解である．この解法を消去法と言う．

- 上の連立 1 次方程式について，行列 $\begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \end{pmatrix}$ を考え，基本変形を施して $\begin{pmatrix} 0 & 1 & r \\ 1 & 0 & s \end{pmatrix}$ とすると，解は $x=r, y=s$ であることが分かる．また，任意の正方行列 $A=\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$ の逆行列を求めるとき，$\begin{pmatrix} w & x & 1 & 0 \\ y & z & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に基本変形を施して，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & m & n \\ 0 & 1 & r & s \end{pmatrix}$ が得られたとき，$A^{-1}=\begin{pmatrix} m & n \\ r & s \end{pmatrix}$ である．この解法を掃きだし法と言う．

16.6　1 次変換（高校数学 C・範囲外）

k は 0 でない定数とする．

- xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ が点 $\mathrm{P}'(x',y')$ に移り，$x'=ax+by, y'=cx+dy$ が成立するとき，この変換は $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表される．ここで，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は 1 次変換を表す行列である．ゆえに，点 P' が点 P へ移る 1 次変換を表す行列は A^{-1} である．
- 上記の変換を f と表すと，$f:(x,y)\longmapsto(x',y')$ となる．A^{-1} は f の逆変換で、f^{-1} と表す．
- x 軸，y 軸，原点，直線 $y=x$ に対する対称移動を表す行列はそれぞれ，
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で表される．
- xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ が点 $\mathrm{P}'(kx',ky')$ に移るとき，この変換を，原点を相似の中心とする相似比 k の相似変換と言い，kE で表される．
- 原点を中心として角 θ だけ回転移動させることを表す行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ である．
- 1 次変換によって動かない点や直線を不動点や不動直線と言う．このとき，$x=x', y=y'$ であることを利用する．
- 変換 f,g を表す行列を A,B とおく．f で全く図形が動かないとき，これを恒等変換と言い，$A=E$ である．また，f を行った後に g を行う変換を合成変換と言い，$f\circ g$ で表す．この変換を表す行列は BA である．一般に，$f\circ g \neq g\circ f$ である．また，$f\circ f^{-1}$ と $f^{-1}\circ f$ は恒等変換である．

16.7　固有値（高校数学範囲外）

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，$A\overrightarrow{x}=\lambda\overrightarrow{x}\,(\overrightarrow{x}\neq\overrightarrow{0})$ を満たす λ を A の固有値，$\overrightarrow{x}$ を A の固有ベクトルと言う．このとき，$\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$ なる固有方程式が成立する（a,b,c,d は実数）．

17　式と曲線（高校数学 C）

17.1　楕円（高校数学 C）

xy 平面上で考える．a,b は正の実数とする．

- 楕円の方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で表される．中心の座標は $(0,0)$ である．また，楕円上の点 (x_1,y_1) における接線の方程式は $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ である．
- $a>b$ のとき，焦点の座標は $(\pm\sqrt{a^2-b^2},0)$，長軸の長さは $2a$，短軸の長さは $2b$，楕円上の任意の点から 2 つの焦点までの距離の和は $2a$ である．$a<b$ のとき，焦点の座標は $(0,\pm\sqrt{a^2-b^2})$ で，長軸の長さは $2b$，短軸の長さは $2a$，楕円上の任意の点から 2 つの焦点までの距離の和は $2b$ である．

17.2　双曲線（高校数学 C）

xy 平面上で考える．a,b は正の実数とする．

- 双曲線の方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ または $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ である．中心の座標は $(0,0)$ で，漸近線の方程式は $\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$ である．

- 前者の方程式のとき，頂点の座標は $(\pm a, 0)$ で，焦点の座標は $(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$，双曲線上の任意の点から 2 つの焦点までの距離の差は $2a$，双曲線上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ である．

- 後者の方程式のとき，頂点の座標は $(0, \pm b)$ で，焦点の座標は $(0, \pm\sqrt{a^2+b^2})$，双曲線上の任意の点から 2 つの焦点までの距離の差は $2b$，双曲線上の任意の点から 2 つの焦点までの距離の差は $2a$ である．双曲線上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = -1$ である．

17.3　放物線（高校数学 C）

xy 平面上で考える．

- 放物線の方程式は $y^2 = 4px$ または $x^2 = 4py$ である．頂点の座標は $(0, 0)$ である．放物線上の任意の点から，焦点と準線までの距離は等しい．

- 前者の方程式のとき，焦点の座標は $(p, 0)$ であり，準線の方程式は $x = -p$，軸は x 軸である．また，放物線上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は $y_1 y = 2p(x + x_1)$ である．

- 後者の方程式のとき，焦点の座標は $(0, p)$ であり，準線の方程式は $y = -p$，軸は y 軸である．また，放物線上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は $x_1 x = 2p(y + y_1)$ である．

17.4　離心率と準線（高校数学 C）

離心率を e、準線を g とする。F は定点で、g は F を通らない体直線である。F と g からの距離の比が、$e : 1$ である点の軌跡は、$e = 1$ のとき、F が焦点で g を準線とする放物線となる。$0 < e < 1$ のとき、F を焦点の 1 つとする楕円となる。$e > 1$ のとき、F を焦点の 1 つとする双曲線となる。

17.5　媒介変数表示（高校数学 C）

xy 平面上で考える．a, b, r は正の実数とする．

- 円 $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$ は，$x = r\cos\theta + x_1, y = r\cos\theta + y_1$ と表示される．
- 楕円 $\frac{(x - x_1)^2}{a^2} + \frac{(y - y_1)^2}{b^2} = 1$ は，$x = a\cos\theta + x_1, y = b\sin\theta + y_1$ と表示される．
- 双曲線 $\frac{(x - x_1)^2}{a^2} - \frac{(y - y_1)^2}{b^2} = 1$ は，$x = \frac{a}{\cos\theta} + x_1, y = b\tan\theta + y_1$ と表示される．
- 放物線 $y^2 = 4px$ は，$x = pt^2, y = 2pt$ と表示される．

17.6　極座標と極方程式（高校数学 C）

- 中心 O を極とし，点の座標を極からの距離 r となす角 θ で表すものを極座標と言う．このとき，直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) には，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, x^2 + y^2 = r^2$ の関係がある．

- 中心 (r_0, θ_0)，半径 a の円の極方程式は $r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0) = a^2$ である．

- 極 O を通り，始線 OX となす角が α である直線の極方程式は $\theta = \alpha$ である．

- 点 $\mathrm{A}(a, \alpha)$ を通り，OA に垂直な直線の極方程式は $r\cos(\theta - \alpha) = a$ である．

- 2 点 $\mathrm{P}(r_1, \theta_1)$,$\mathrm{Q}(r_2, \theta_2)$ 間の距離は，$\mathrm{PQ}^2 = r_1^2 + r_2^2\cos(\theta_2 - \theta_1)$ である．

17.7 色々な曲線（高校数学 C）

- 半径 a の円が定直線上をすべることなく回転していくとき，円周上の定点が描く曲線をサイクロイドと言う．xy 平面上で考え，媒介変数 θ を用いると，$x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$ と表される．
- xy 平面上で，媒介変数 t を用いると，$x = \sin at, y = \sin bt$ で表される曲線をリサージュ曲線と言う（a, b は実数）．
- 極座標上で極方程式 $r = a(1 + \cos\theta)$ の表す曲線 $(a > 0)$ を心臓形（ガージオイド）と言う．
- 極座標上で極方程式 $r = a\theta$ の表す曲線 $(a > 0, \theta \geqq 0)$ をアルキメデスの渦巻線と言う．
- 極座標上で極方程式 $r = \sin a\theta$ の表す曲線を正葉曲線と言う．
- 極座標上で極方程式 $r = a + b\cos\theta$ の表す曲線をリマソンと言う．$a = b$ のときはガージオイドに他ならない（a, b は実数）．
- 極座標上で極方程式 $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ の表す曲線をレムニスケートと言う（a は実数）．
- xy 平面上で，$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$，または，媒介変数 θ を用いて，$x = \cos^3 a\theta, y = \sin^3 a\theta$ で表される曲線をアステロイドと言う $(a > 0)$.

18 統計処理（高校数学 C）

18.1 正規分布（高校数学 C）

m は実数，n は正の整数，p は $0 \leqq p \leqq 1$ なる実数，X, Z は確率変数とする．

- 期待値 m，標準偏差 σ であり，$y = f(x)$ が直線 $x = m$ に対称な確率分布を正規分布と言い，$N(m, \sigma^2)$ で表す．このとき，$Z = \dfrac{X - m}{\sigma}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．
- 二項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数は，n が大きいときに近似的に正規分布 $N(np, np(1 - p))$ に従う．

18.2 標本調査（高校数学 C）

m は実数，n は正の整数，p は $0 \leqq p \leqq 1$ なる実数とする．また，母集団について，母平均を m，母標準偏差を σ，母比率を p として，大きさ n の無作為標本を抽出する．

- 標本平均 $\overline{X}$ について，$E(\overline{X}) = m, \sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ となる．n が大きいとき，$\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う．
- 標本比率 R について，$E(R) = p, \sigma(R) = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ となる．n が大きいとき，R は近似的に
  正規分布 $N\left(p, \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$ に従う．

18.3 推定（高校数学 C）

m は実数，n は正の整数，p は $0 \leqq p \leqq 1$ なる実数とする．また，母集団について，母平均を m，母標準偏差を σ，母比率を p として，大きさ n の無作為標本を抽出する．なお，n は十分に大きいものとする．

- 標本平均を $\overline{X}$ とすると，信頼度 95% で $\overline{X} - 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$，
  信頼度 99% で $\overline{X} - 2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ である．
- 標本比率を R とすると，信頼度 95% で，$R - 1.96\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}} \leqq p \leqq R + 1.96\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$，
  信頼度 99% で $R - 2.58\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}} \leqq p \leqq R + 2.58\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$ である．

19　BASIC（高校数学 B）

19.1　BASIC の計算式と組み込み関数（高校数学 B）

e は自然対数の底とする．

- 加法，減法，乗法，除法を表す演算子はそれぞれ，+,-,*,/である．( ) を使って演算の優先順位を変更できる．
- $\mathrm{X^Y}$ は X＾Y，e^{X} は EXP(X)，$\log_e \mathrm{X}$ の値は LOG(X)，|X| は ABS(X)，$\sqrt{\mathrm{X}}$ は SQR(X)，X を超えない最大の整数は INT(X)，整数 X を整数 Y で割った商は X￥Y，余りは X MOD Y，sinX は SIN(X)，cosX は COS(X)，tanX は TAN(X) と表記する．なお，三角関数の値はラジアンで入力する．
- RND は 0 以上 1 未満の乱数を返す．SGN(X) は X が正のとき 1，0 のとき 0，負のとき -1 を返す．

19.2　BASIC の命令（高校数学 B）

※ここでは，コンピュータの機種によって命令が異ならないものだけを挙げた．

- メモリからプログラムを消すのは NEW，プログラムを表示するのは LIST，プログラムを実行するのは RUN，プログラムを終了するのは END である．
- 変数 A があるとき，INPUT A で A の値を入力させる．PRINT で文字列や数字を表示する．GOTO で指定した行番号に実行を移す．
- IF THEN 文は条件分岐，FOR NEXT 文は繰り返し文である．

20　その他の重要事項

20.1　k 進法（k は $k \neq 10$ なる正の整数）

k 進法で表された $n(n>0)$ 桁の正の整数 $a_1a_2\cdots\cdots a_n$ は，10 進法表示では $a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$ である．ただし，$0 \leqq a_i \leqq k-1$ で $a_1 \neq 0$ である．

20.2　数

連続した 2 整数の積は 2 の倍数で，連続した 3 整数の積は 3 の倍数である．自然対数の底 e と円周率 π は無理数である．また，i, j を $i>j$ なる正の整数とすると，$\sum_{i=1}^{j} i$ で表される数を三角数，i^2 で表される数を四角数と言う．

20.3　循環小数の表記

a, b, c は 1 桁の数とする．

- $0.\dot{a} = 0.aaa\cdots\cdots$
- $0.a\dot{b}\dot{c} = 0.abcbcbc\cdots\cdots$
- $0.\dot{a}b\dot{c} = 0.abcabcabc\cdots\cdots$

20.4　関数

xy 平面上で考える．原点に対して対称な関数を奇関数，y 軸に対して対称な関数を偶関数と言う．$f(x)$ が奇関数ならば $f(-x)=-f(x)$，偶関数ならば $f(-x)=f(x)$ である．k を実数とし，$f(x)=f(x+k)$ のとき，$f(x)$ は基本周期 k の周期関数である．$f(x,y)=0$ の形で表される関数を陰関数と言う．

20.5 記号

$\therefore$ は「ゆえに」，$\because$ は「なぜならば」を意味する．

20.6 座標と領域

xy 平面上で $x>0, y>0$ なる領域を第 1 象限，$x<0, y>0$ なる領域を第 2 象限，$x<0, y<0$ なる領域を第 3 象限，$x>0, y<0$ なる領域を第 4 象限と言う．

20.7 区間

xy 平面上の関数 $y=f(x)$ について，$a \leqq x \leqq b$ は閉区間であり $[a,b]$ と表す．また，$a<x<b$ は開区間であり (a,b) と表す．$a<x \leqq b, a \leqq x < b$ はそれぞれ，$(a,b], [a,b)$ と表す．また，区間の端が $\pm\infty$ のときは，開区間として扱う．

20.8 ガウス記号（日本独自の記号？）

k, n は $k>0$ なる整数，x は実数とする．

- x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．$n \leqq x < n+1 \Leftrightarrow [x]=n$
- $[x+n]=[x]+n, k[x] \leqq [kx]$
- $[f(x)]=n \Leftrightarrow n \leqq f(x) < n+1, [f(x)]+[g(x)]=n \Leftrightarrow n \leqq f(x)+g(x) < n+2$

参考文献

[1] 永尾汎 ほか 9 名, 改訂版 高等学校 数学 I, 数研出版株式会社

[2] 永尾汎 ほか 8 名, 改訂版 高等学校 数学 II, 数研出版株式会社

[3] 伊藤清三 ほか 9 名, 改訂版 高等学校 新編 数学 III, 数研出版株式会社

[4] 永尾汎 ほか 9 名, 改訂版 高等学校 数学 A, 数研出版株式会社

[5] 永尾汎 ほか 8 名, 改訂版 高等学校 数学 B, 数研出版株式会社

[6] 永尾汎 ほか 8 名, 改訂版 高等学校 数学 C, 数研出版株式会社

[7] 長瀬道弘,RED クリアー数学 I 教科傍用（改訂版・第 2 刷）, 数研出版株式会社

[8] 長瀬道弘,RED クリアー数学 A 教科傍用（改訂版・第 2 刷）, 数研出版株式会社

[9] 数研出版編集部, サクシード数学 II 教科傍用（改訂版・第 4 刷）, 数研出版株式会社

[10] 数研出版編集部, サクシード数学 B 教科傍用（改訂版・第 3 刷）, 数研出版株式会社

[11] 宇敷重広, クリアー数学 III 教科傍用（改訂版・第 3 刷）, 数研出版株式会社

[12] 宇敷重広, クリアー数学 C 教科傍用（改訂版・第 2 刷）, 数研出版株式会社

[13] 数研出版編集部, 三訂版 シニア数学演習 I・II・A・B 受験編（第 3 刷）, 数研出版株式会社

[14] 数研出版編集部,2000 年版 スタンダード数学演習 I・II・A・B 受験編（第 3 刷）, 数研出版株式会社

[15] 数研出版編集部, 四訂版 オリジナル・スタンダード数学演習 III・C 受験編（第 1 刷）, 数研出版株式会社